

Part 2. 진동의 기초

한국해양대학교 해양공학과

진동의 기초

○ 진동 = 일정한 주기를 가지고 어떠한 운동을 반복하는 것

○ 진동시스템 (진동계)의 요소

- 위치에너지 저장 : 스프링 또는 탄성체
- 운동에너지 저장 : 질량 또는 관성
- 에너지 소산 : 감쇠기

○ 진동은 위치에너지와 운동에너지의 상호변환

- 레일리의 해석법

진동운동 지배방정식

○ 뉴턴 제2법칙 : 질량에 의한 힘은 가속도에 비례 (m : 질량; 질량계수)

$$\Sigma F_{mass} = ma = m\ddot{x}$$

○ 유체 저항에 의한 힘은 속도에 비례 (c : 감쇠계수)

$$\Sigma F_{damping} = c\dot{x}$$

○ 스프링에 의한 힘은 거리에 비례 (k 스프링계수)

$$\Sigma F_{spring} = kx$$

○ 모두 합하면, 진동운동의 미분방정식 (기본형태는 동일! m, c, k 를 구해서 대입하고 수학적 풀이!)

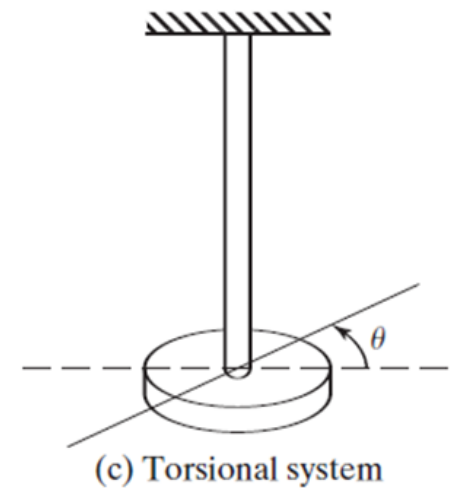
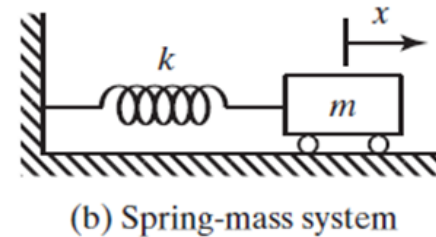
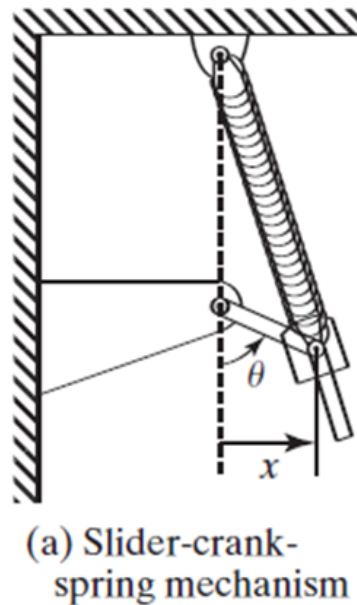
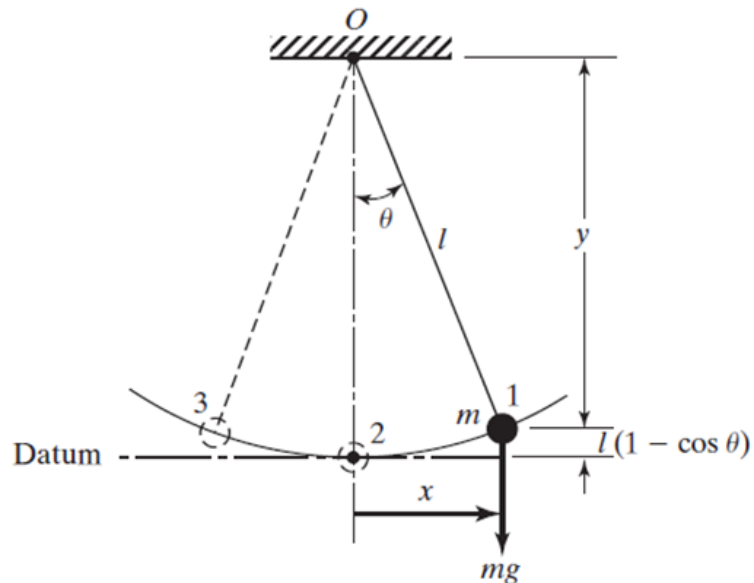
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Sigma F_{external}$$

자유도

○ 자유도 (DOF; Degree of Freedom)

운동체의 위치를 표현하기 위해 필요한 독립변수의 수

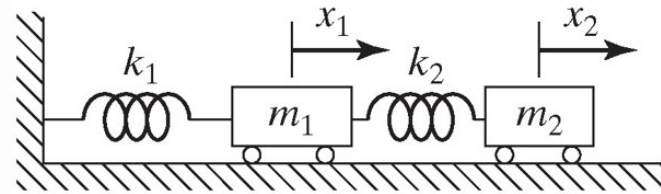
- 1자유도계(1DOF) 예 (x - y 또는 θ) 로 표현 가능. x, y 는 독립변수가 1개 ($\because x^2 + y^2 = l^2$)



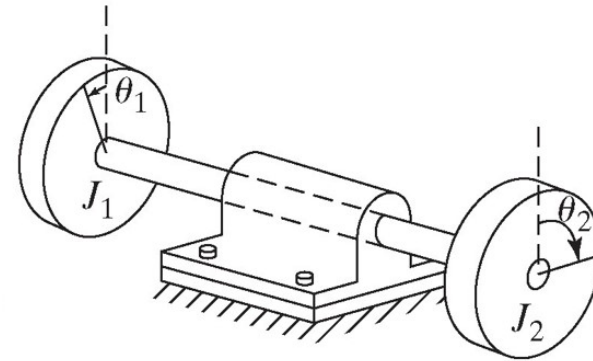
자유도 (계속)

○ 2자유도 (2DOF), 3자유도(3DOF)

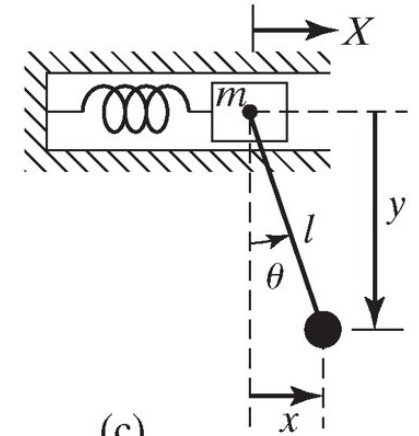
- 2자유도계(2DOF)



(a)

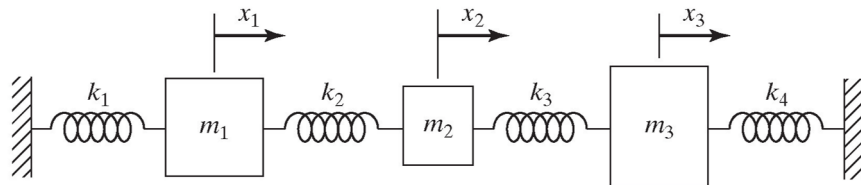


(b)

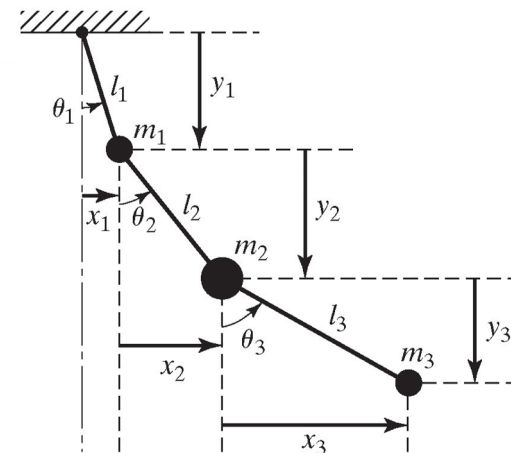


(c)

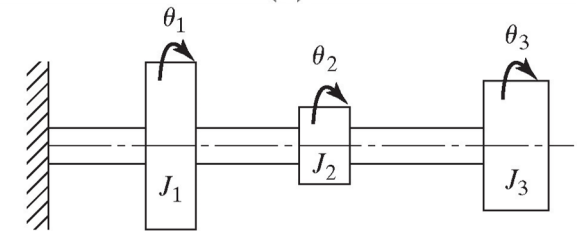
- 3자유도계(3DOF)



(a)



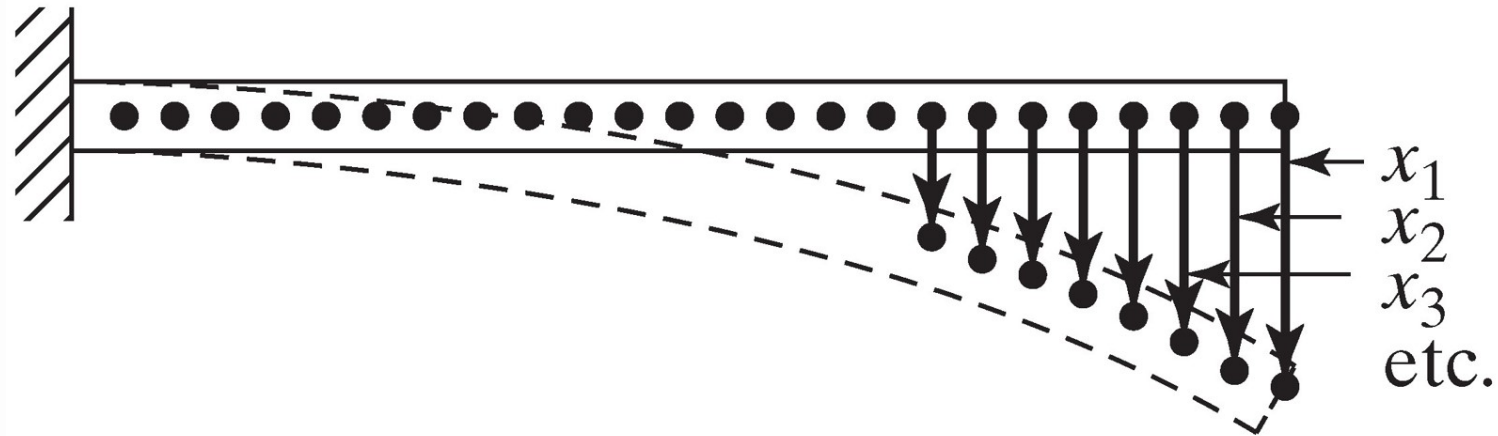
(b)



(c)

자유도 (계속)

○ 무한한 자유도 : 연속체, 분포계



Copyright ©2017 Pearson Education, All Rights Reserved

- 실제로는 유한한 자유도로 모델링해 해석 (FEM의 요소분할 등)
- 자유도를 높일수록 정확하나 계산양이 많아짐

진동의 분류

○ 강제진동 (Forced Vibration)

- 지속적인(반복적인) 외력에 의해 발생하는 진동

○ 자유진동 (Free Vibration)

- 초기조건에 의해 발생하는 진동
- 외력이 없는 경우

○ 감쇠진동 (Damped Vibration)

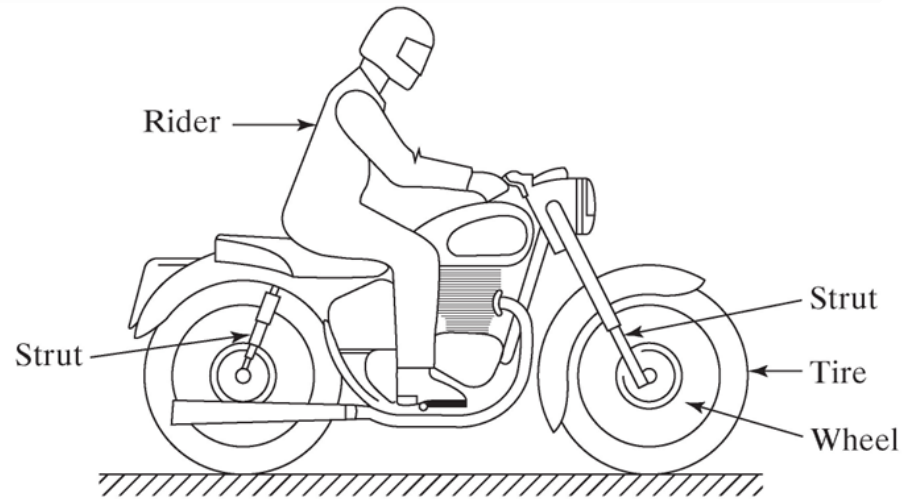
- 진동하면서 에너지가 감쇠 (열, 마찰, 공기저항 등)



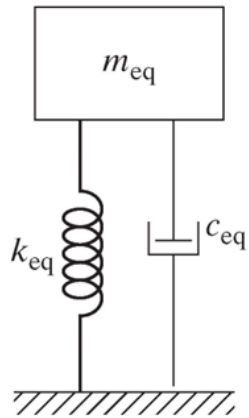
임팩트 해머
(Impact Hammar)

진동해석의 순서 : 수학모델링 → 지배방정식 → 해석

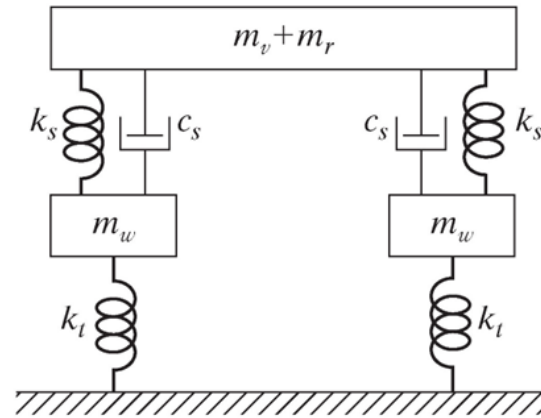
정답은 없다..!



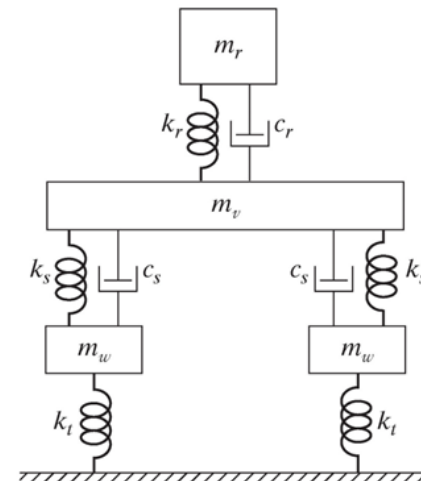
(a)



(b)

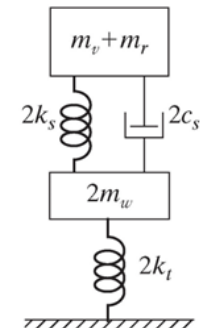


(c)



(d)

Subscripts
 t : tire v : vehicle
 w : wheel r : rider
 s : strut eq : equivalent



(e)

스프링 요소

○ 선형 스프링

- 스프링 자체의 감쇠와 질량은 없다고 가정
- 훅의 법칙을 이용해 다음과 같은 힘과 변위의 관계를 가짐

$$F = kx$$

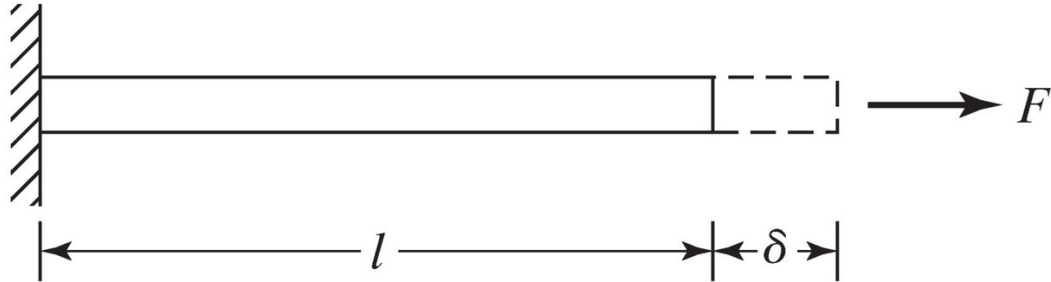
F : 작용하는 힘, k : 스프링상수, x : 변위

- 스프링 내부에 저장되는 위치에너지(포텐셜에너지)

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

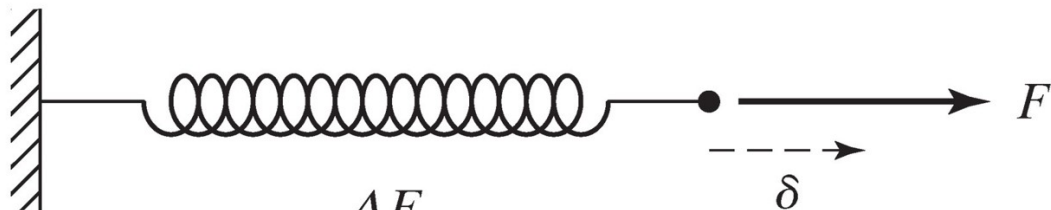
스프링 요소 (위치에너지를 저장)

○ 외팔보 막대의 수직응력 스프링 모델링



(a)

$$\delta = \frac{\delta}{l} l = \epsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Fl}{AE}$$



(b)

$$k = \frac{k}{x} = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l}$$

스프링 요소 (위치에너지를 저장)

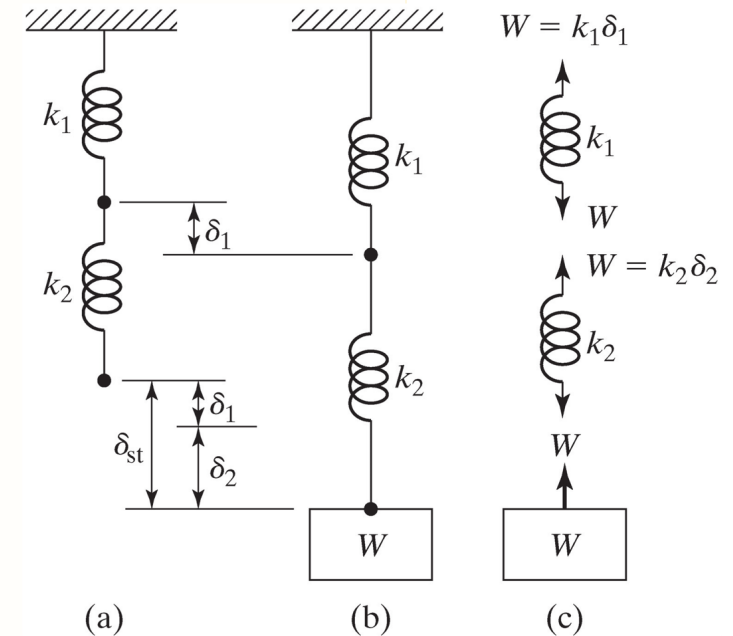
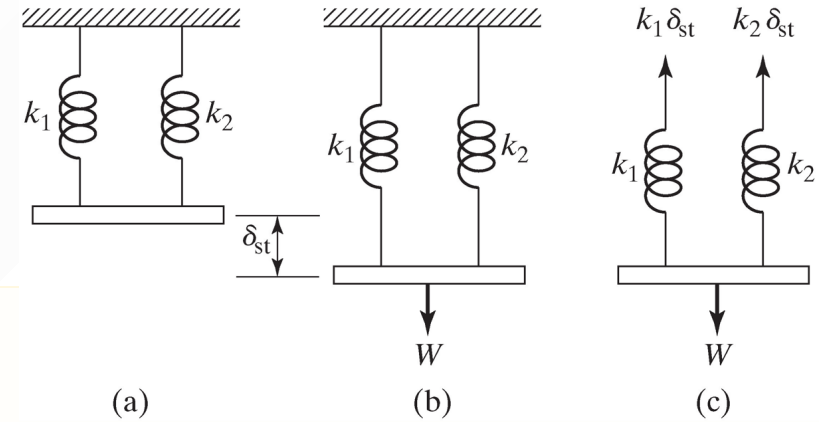
○ 스프링 조합

• 스프링 병렬조합

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

• 스프링 직렬 조합

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

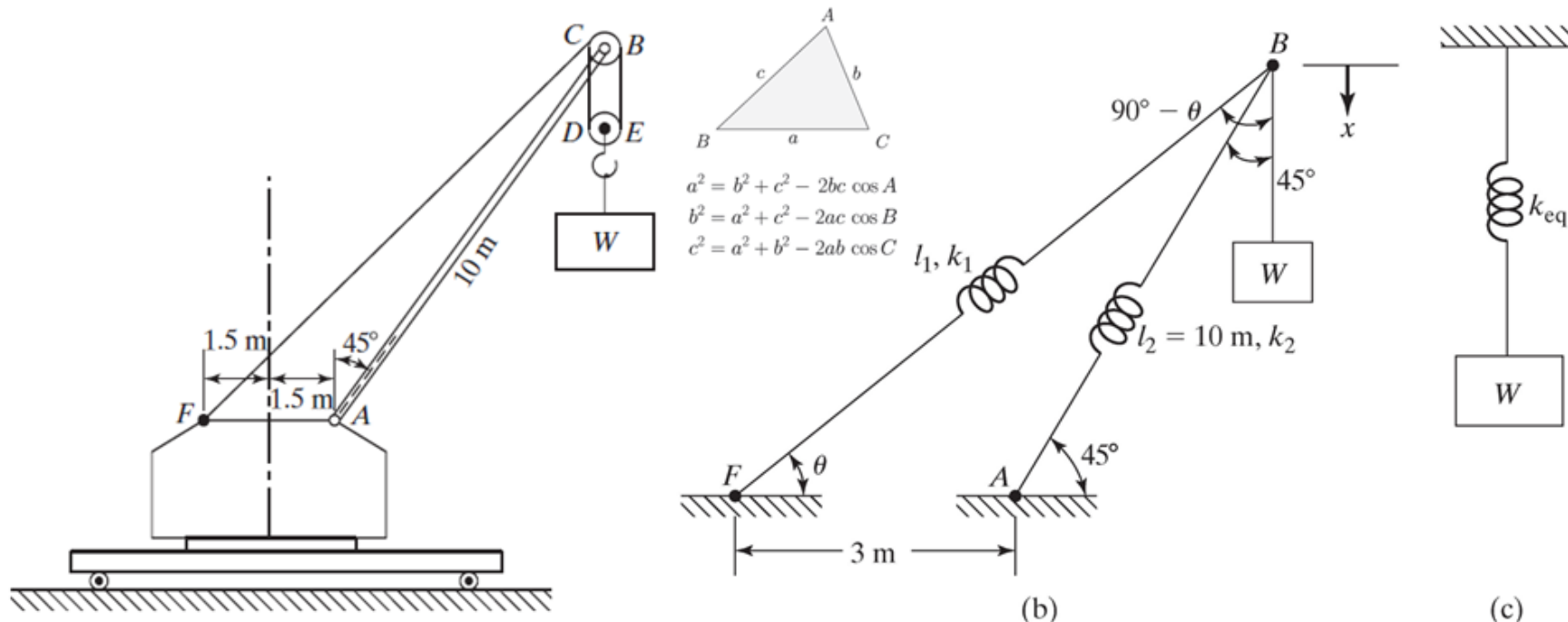


스프링 요소 (위치에너지를 저장)

○ 등가 스프링 상수 계산 예제

AB는 길이 10 m, 단면적 2500 mm^2 강철막대. 무게 W 가 단면적 100 mm^2 의 강철 케이블 CBEDF에 연결되어있을때, CDEB를 무시하고 수직방향 등가 스프링상수는? 강철 탄성계수

$$E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$



스프링 요소 (위치에너지를 저장)

○ 등가 스프링 상수 계산 풀이방법 (역순)

- 에너지 방정식을 만들어 구한다

$$U_{eq} = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$$

- 에너지의 총량은 같다

$$U_{eq} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2$$

- 스프링의 늘어난 양은 같다 (코사인함수 사용 l_1, l_2 변화량과 x 관계 정리)

$$k_{eq} = 26.4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

스프링 요소 (위치에너지를 저장)

○ 외팔보 막대의 수평응력 모델링

(a) Cantilever with end force

(b) Equivalent spring

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} \quad k = \frac{W}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

c. f. $\delta = \frac{Fl}{AE}, \quad k = \frac{AE}{l}$

스프링 요소 (위치에너지를 저장)

○ 등가 스프링 상수 (수평 + 수직응력)

(a)

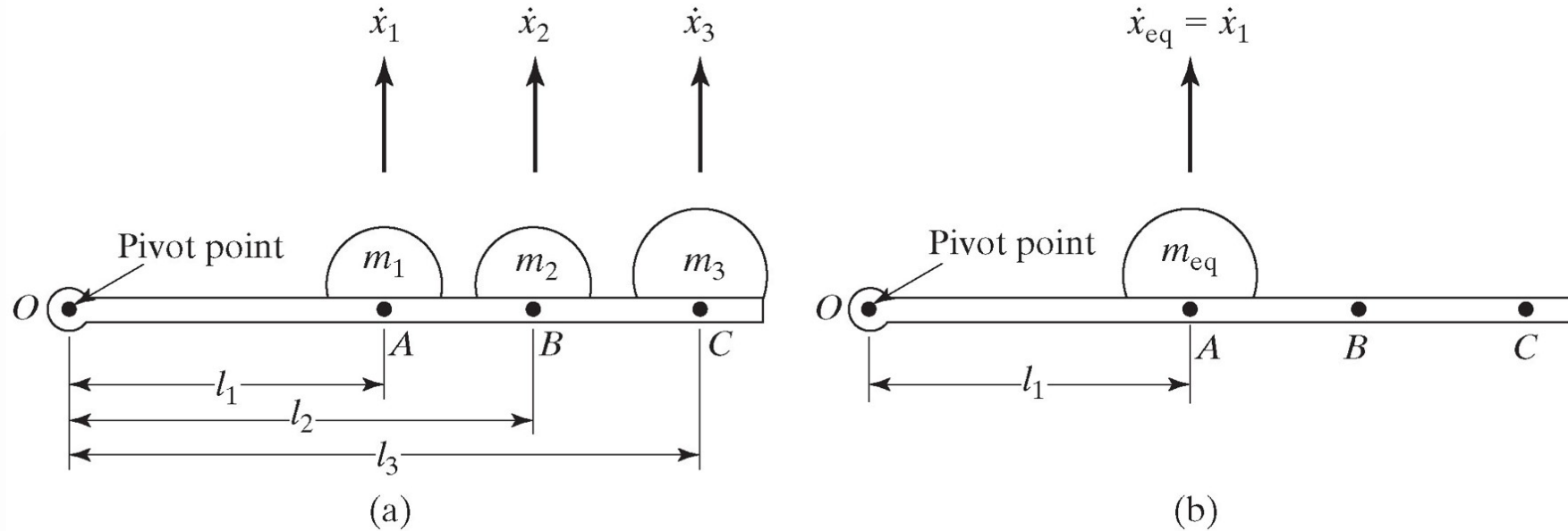
$$k_b = \frac{3EL}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left(\frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3}$$

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

질량 요소 (운동에너지를 저장)

○ 질량의 조합

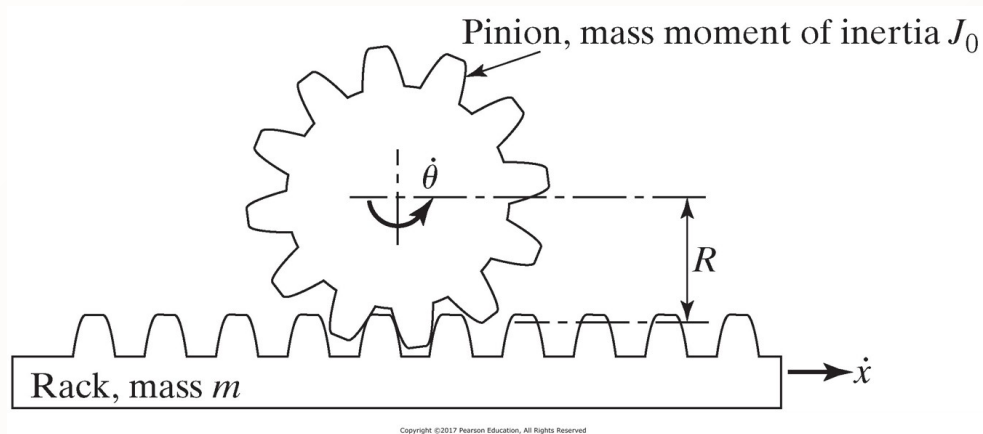


$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}_1, \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1$$

등가 운동에너지 방정식을 이용하면, 등가질량 $m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$

질량 요소 (운동에너지를 저장)

○ 병진+회전질량 조합



운동에너지, ($J_0 = I_0 =$ 관성모멘트)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

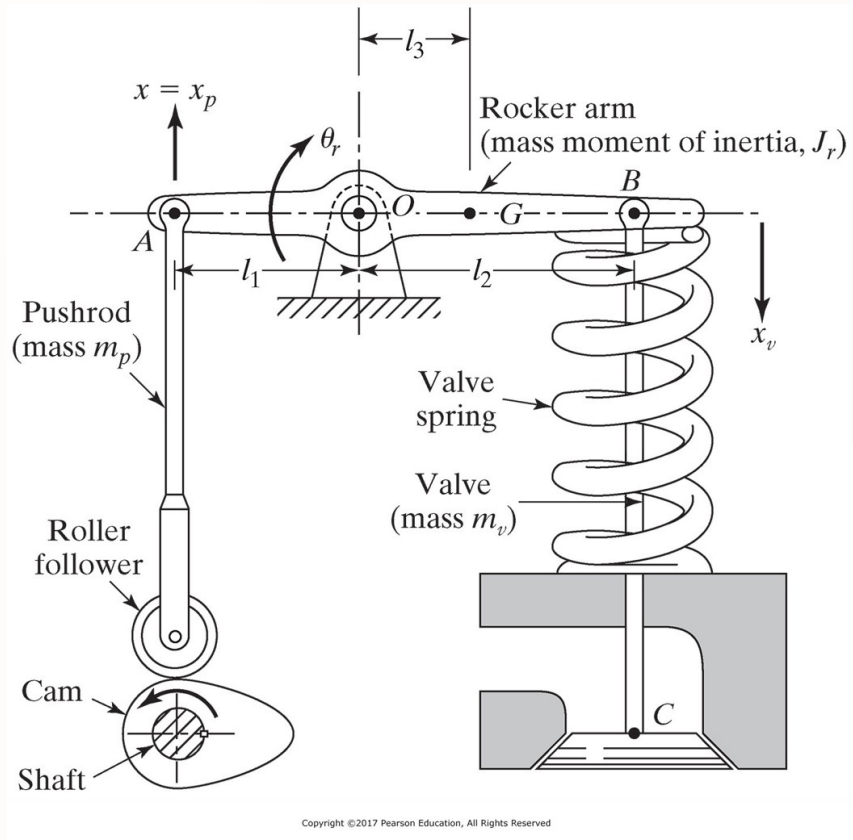
등가 회전운동에너지,

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \frac{\dot{x}^2}{R^2} \quad \rightarrow \quad m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

질량 요소 (운동에너지를 저장)

○ 병진+회전질량 조합



운동에너지,

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2$$

점 A에서의 등가질량,

$$\dot{x}_p = \dot{x} = \dot{x}_{eq}, \quad \dot{x}_r = \frac{\dot{x} l_3}{l_1}, \quad \dot{x}_v = \frac{\dot{x} l_2}{l_1}, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}}{l_1}$$

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \rightarrow m_{eq} = m_p + \frac{m_v l_2^2}{l_1^2} + \frac{m_r l_3^2}{l_1^2} + \frac{J_r}{l_1^2}$$

감쇠 요소 (에너지 소산)

○ 점성 감쇠

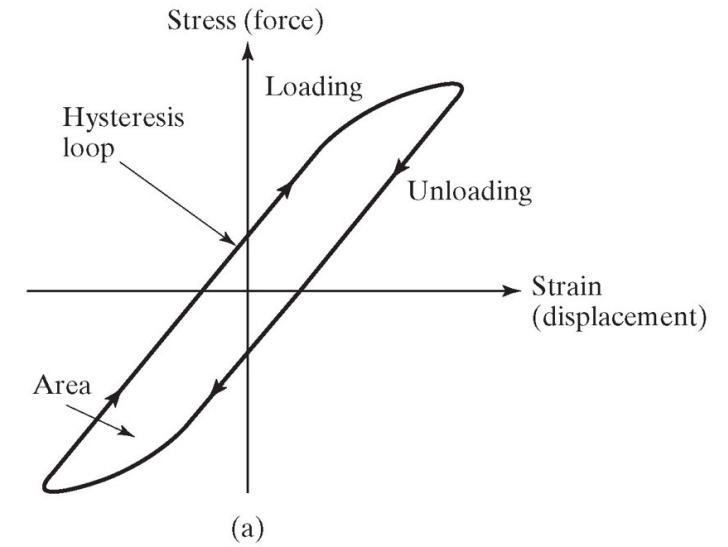
- 진동체의 속도에 비례하게 감쇠력 발생 (공기, 물, 가스, 오일 등)

○ 마찰 감쇠

- 마찰력에 의해 진동체의 속도가 감쇠 (마찰력은 속도에 비례)

○ 재료 또는 이력(Hysteretic) 감쇠

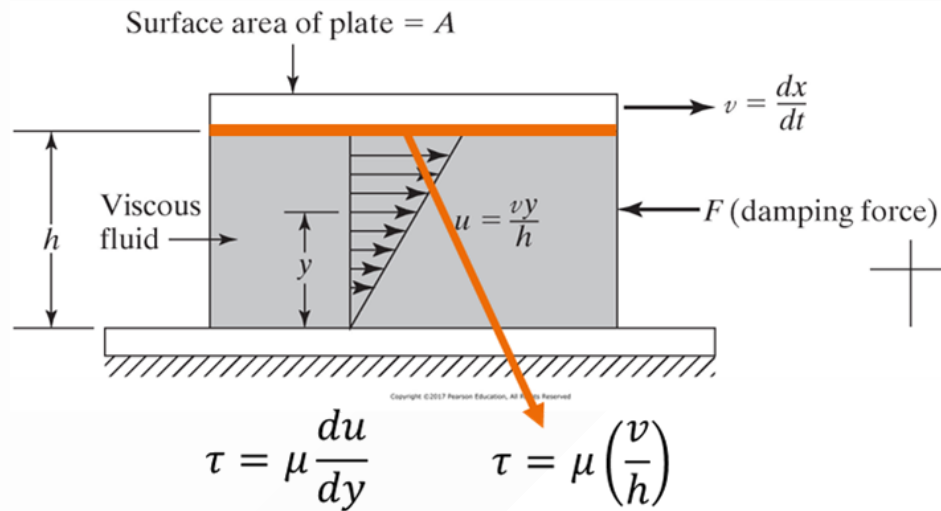
- 재료의 변형, 회복에 의한 에너지 감쇠



감쇠 요소 (에너지 소산)

○ 점성 감쇠 예 (Couette Flow : 한쪽 평판은 고정, 다른 평판이 운동)

- 평판 사이의 점성 유체가 감쇠 작용 (점성계수 μ : 유체의 끈적거림 정도)



$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = \left(\frac{\mu A}{h} \right) v = c v,$$

c : damping coefficient

감쇠 요소 (에너지 소산)

○ 감쇠 조합

- 병렬조합

$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

- 직렬조합

$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$$



교수자

- [최원석 \(Choi_Woen-Sug\)](#)

상담예약 : [개인 상담예약 링크](#) (📢담당이 아니어도 아무나 언제든지 😊)

한국해양대학교 해양공학과 (해양과학기술관 D 301호)



Hooray!